問. $\int \sin(\ln x)\,dx = ?$

知識として, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$. ということを知っているので,

(試行 1) $\frac{d}{dx}\cos(\ln x) = -\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln x)$.

ん〜, うまくない。〰〰部の $1/x$ をどうにかできないだろうか。

(試行 2) $\frac{d}{dx}x\cdot\cos(\ln x)$

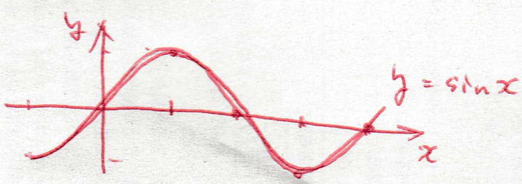
$$= \cos(\ln x) + x\cdot\frac{d}{dx}\cos(\ln x)$$

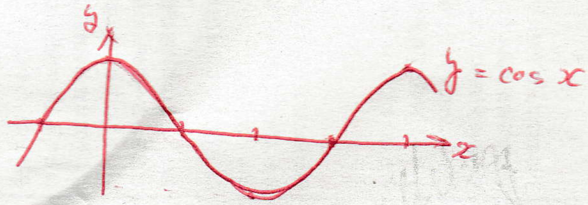
$$= \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$$

おっ、〰〰のように、問いの関数を抽き出すことができたぞ。
ただ、$\cos(\ln x)$ がジャマである。どうしよう。

(熟考)

いや、でも、$\sin(x)$ も $\cos(x)$ も位相がちょっと違うだけで
似た関数じゃないか。だから同じように考えても…





(試行 3) $\frac{d}{dx}\sin(\ln x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$

(試行 4) $\frac{d}{dx}x\cdot\sin(\ln x)$

$$= \sin(\ln x) + \cos(\ln x).$$

おっ、やったね。これで答えだ!

つまり、問いに対する答えは、次のようにまとめられる。

答．

$$\frac{d}{dx} x \cdot \cos(\ln x) = \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$$

$$\frac{d}{dx} x \cdot \sin(\ln x) = \cos(\ln x) + \sin(\ln x)$$

であるから、

$$2\sin(\ln x) = \frac{d}{dx} x\sin(\ln x) - \frac{d}{dx} x\cos(\ln x).$$

つまり、

$$\sin(\ln x) = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) \right\}$$

であり、微分積分学の基本定理より、

$$\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}\left\{ \sin(\ln x) - \cos(\ln x) \right\} + Const.$$

と表わすことができる。

もちろん、$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dx} x\sin(\ln x - \pi/4) = \sin(\ln x)$

であることを直接探り当てたひらめきの人は、

この式を書いてしまえばそれでいい。

2008．2．19．　[illegible]