François Viète の無限積

フランスの16世紀の数学者フランソワ＝ビエトは、高次方程式の変数変換による簡約化など当時の最先端かつ流行であった代数学への貢献が注目される数学者であるが、彼は三角関数についての著作をいくつも遺してゐる。

それらの著作の中で、私の目に印象を残してゐるのが、通例 Viète の無限積 と呼ばれる次の定理である。

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\theta}{2^k} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdot\cdots\cdots$$

ここで、記号 $\prod_{k=1}^{n} a_k$ とは、a_k を k を1からnまで変化させながら掛けてゆく、という意味である。

すなはち、$\frac{\theta}{2}$ の cosine，更に半角の $\frac{\theta}{2^2}$，$\frac{\theta}{2^3}$，$\frac{\theta}{2^4}$，… のそれぞれの cosine を掛け合わせていったものが $\frac{\sin\theta}{\theta}$（所謂 sinc 函数）に等しくなる、という主張である。

以下では、この Viète の無限積をできるだけ簡明な方法で証明してみたいと思ふ。

$S_n = \sin\frac{\theta}{2^n}$ とおくことにする。

ここで、$\frac{\theta}{2^n} = \frac{\theta}{2^{n+1}} + \frac{\theta}{2^{n+1}}$ であることに注意すると、

加法定理より、S_n は次のように書ける。

$$S_n = 2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

なお、ここで、$S_{n+1} = \sin\frac{\theta}{2^{n+1}}$ であるので

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

となることがわかる。

このことを利用すると、

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{S_{k-1}}{S_k}$$

$$= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{S_{k-1}}{S_k}$$

と書け、

ここで

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{S_{k-1}}{S_k} = \frac{S_0}{S_1}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdots\cdots\frac{S_{n-2}}{S_{n-1}}\cdot\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_0}{S_n}.$$

となることに注意すると

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} \longrightarrow \frac{\sin\theta}{\theta} \quad (n\to\infty)$$

2016/5/18 S. Toriyama

となることがわかる。■